ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

DƯƠNG THÚY QUỲNH

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP ĐẾM TRONG CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC TỔ HỢP

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

DƯƠNG THÚY QUỲNH

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP ĐẾM TRONG CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC TỔ HỢP

LUẬN VĂN

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.01.13

Người hướng dẫn khoa học:
GS.TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN - NĂM 2016

Mục lục

Mở đầu **1**

1 Một số kiến thức chuẩn bị **3**

1.1 Các quy tắc đếm cơ bản 3

1.1.1 Quy tắc cộng và quy tắc nhân 3

1.1.2 Tổ hợp và chỉnh hợp 3

1.2 Một số nguyên lý cơ bản 4

1.2.1 Bất biến 4

1.2.2 Nguyên lí Dirichlet 5

1.2.3 Nguyên lí cực hạn 7

2 Phân loại và các phương pháp giải các bài toán đếm trong hình học tổ hợp **9**

2.1 Phân loại các bài toán đếm 9

2.1.1 Đếm đối tượng tạo bởi điểm, đoạn thẳng, đường thẳng . . . 9

2.1.2 Đếm đối tượng tạo thành miền trong mặt phẳng 12

2.2 Các phương pháp giải bài toán đếm 14

2.2.1 Phương pháp sử dụng nguyên lí bất biến 14

2.2.2 Phương pháp sử dụng nguyên lí Dirichlet 22

2.2.3 Phương pháp sử dụng nguyên lí cực hạn 38

3 Các dạng toán liên quan **49**

3.1 Bài toán về tô màu hình vẽ 49

3.2 **Đếm cấu hình** 63

3.3 Phối hợp các phương pháp đếm khác nhau 64

Tài liệu tham khảo **71**

Mở đầu

Hình học tổ hợp là một phần quan trọng trong toán học nói chung và trong tổ hợp nói riêng, nó thường xuất hiện trong các đề thi học sinh giỏi và Olympic các cấp. Bài toán tổ hợp nói chung và hình học tổ hợp nói riêng thường là bài toán khó, rất phong phú và linh hoạt về cách giải. Tuy nhiên, ở nước ta hiện nay, tài liệu về tổ hợp chưa nhiều, tài liệu về hình học tổ hợp lại càng ít hơn. Do đó, tôi viết luận văn này với mong muốn sẽ cung cấp thêm cho các em học sinh phổ thông một tài liệu hay và bổ ích, nhằm đáp ứng được phần nào lòng đam mê, yêu thích và khám phá toán học của các học sinh, đồng thời tôi cũng mong rằng đây có thể là tài liệu bổ ích để các đồng nghiệp tham khảo.

Luận văn này đề cập đến một số phương pháp chính để giải quyết các bài toán đếm trong hình học tổ hợp. Ngoài phần mở đầu, phần kết luận, nội dung của luận văn gồm ba chương.

Chương 1 nhắc lại một số kiến thức chuẩn bị, liên quan đến các công thức đếm trong tổ hợp.

Chương 2 đưa ra sự phân loại một số đối tượng đếm trong hình học tổ hợp và nêu ba phương pháp để giải quyết bài toán đếm.

Phương pháp sử dụng nguyên lí bất biến là một phương pháp hiệu quả để giải quyết các bài toán đếm. Ta thường sử dụng nguyên lí bất biến trong những bài toán có một tính chất không thay đổi qua sự tác động, biến đổi của hệ thống.

Phương pháp sử dụng nguyên lí Dirichlet là một phương pháp thông dụng để giải quyết các bài toán hình học tổ hợp. Dùng nguyên lí này trong nhiều trường hợp ta dễ dàng chứng minh được sự tồn tại của một đối tượng với tính chất xác định, tuy rằng với nguyên lí này ta thường chỉ chứng minh được sự tồn tại mà không đưa ra được phương pháp tìm được đối tượng cụ thể.

Phương pháp sử dụng nguyên lí cực hạn vào giải các bài toán hình học tổ hợp là một phương pháp được vận dụng cho nhiều lớp bài toán khác nhau. Nguyên lí này dùng để giải các bài toán mà trong đối tượng phải xét của nó tồn tại các giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất theo một nghĩa nào đó và thường kết hợp với những phương pháp khác, đặc biệt là phương pháp phản chứng.

Chương 3 nêu ra một số dạng toán liên quan như là bài toán tô màu, bài toán đếm cấu hình và một số bài toán hình học tổ hợp trong các đề thi học sinh giỏi quốc gia và quốc tế.

Trong mỗi chương các bài tập thường được dẫn dắt theo những chủ đề nhất định. Đồng thời, mỗi bài đều có lời giải chi tiết, ngắn gọn, sáng tạo và bất ngờ. Tác giả hi vọng, chính điều này sẽ giúp người đọc tìm thấy cho mình những kiến thức bổ ích và kích thích sự ham hiểu biết và lòng say mê học toán của người đọc.

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình và nghiêm túc của thầy giáo GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu. Tôi xin được bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc đến thầy.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu, Ban chủ nhiệm Khoa Toán Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, các thầy cô giảng viên đã quan tâm, tạo điều kiện giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập và nghiên cứu tại Trường.

Thái Nguyên, ngày 29 tháng 5 năm 2016.

Học viên

Dương Thúy Quỳnh

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

1.1 Các quy tắc đếm cơ bản

1.1.1 Quy tắc cộng và quy tắc nhân

Quy tắc cộng: Nếu công việc A có hai phương án thực hiện (loại trừ lẫn nhau), phương án 1 có n_1 cách thực hiện, phương án 2 có n_2 cách thực hiện thì công việc A có $n_1 + n_2$ cách thực hiện. Trên ngôn ngữ tập hợp: $A \cap B = \varnothing$ thì $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Quy tắc nhân: Nếu công việc A có thể chia thành 2 công đoạn tiếp nối nhau, công đoạn 1 có n_1 cách thực hiện, công đọan 2 có n_2 cách thực hiện thì công việc A có $n_1.n_2$ cách thực hiện. Trên ngôn ngữ tập hợp: $|A.B| = |A|.|B|$.

Quy tắc phần bù: $|A| = |X| - |\overline{A}|$, trong đó $\overline{A}$ là phần bù của A trong X.

1.1.2 Tổ hợp và chỉnh hợp

Xét tập hợp X gồm n phần tử. Từ tập hợp cơ bản này, ta có thể xây dựng các đối tượng tổ hợp phong phú.

Tập các tập con của tập X: Tập các tập con của X được ký hiệu là $P(X)$. Dễ thấy $|\mathrm{P(X)}| = 2^n$. Các tập con của một tập hợp là một đối tượng xuất hiện khá nhiều trong các bài toán đếm.

Chỉnh hợp: Chỉnh hợp chập k của một tập hợp là một bộ k phần tử phân biệt được sắp thứ tự của tập hợp ấy. Ví dụ nếu $X = \{1, 2, 3\}$ và $k = 2$ thì ta có các chỉnh hợp là (1, 2), (1,3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2). Số các chỉnh hợp chập k của n phần tử được ký hiệu là A_n^k.

Hoán vị: Hoán vị của n phần tử là chỉnh hợp chập n của n phần tử đó, nói cách khác, là một cách sắp thứ tự các phần tử đó. Hoán vị của X còn có thể định nghĩa như một song ánh từ X vào X. Số các hoán vị của n phần tử được ký hiệu là P_n.

Tổ hợp: Tổ hợp chập k của một tập hợp là một bộ k phần tử phân biệt không sắp thứ tự của tập hợp ấy. Nói cách khác, đó là một tập con k phần tử. Ví dụ nếu $X = \{1, 2, 3\}$ và $k = 2$ thì ta có các tổ hợp là $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$. Số các tổ chập k của n phần tử được ký hiệu là C_n^k.

Chỉnh hợp lặp: Chỉnh hợp lặp chập k của một tập hợp là một bộ k phần tử không nhất thiết phân biệt được sắp thứ tự của tập hợp ấy. Ví dụ nếu $X = \{1, 2, 3\}$ và $k = 2$ thì ta có các chỉnh hợp lặp là $\{1, 1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 1\}$, $\{2, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 1\}$, $\{3, 2\}$, $\{3, 3\}$. Số các chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử được ký hiệu là $\overline{A}_n^k$.

Tổ hợp lặp: Tổ hợp lặp chập k của một tập hợp là một bộ k phần tử không nhất thiết phân biệt không sắp thứ tự của tập hợp ấy. Ví dụ nếu $X = \{1, 2, 3\}$ và $k = 2$ thì ta có các tổ hợp lặp là $\{1, 1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 3\}$. Số các tổ hợp lặp chập k của n phần tử được ký hiệu là $\overline{C}_n^k$.

1.2 Một số nguyên lý cơ bản

1.2.1 Bất biến

a) Khái niệm bất biến

Giả sử ta có một hệ thống (X) các đại lượng và các phép biến đổi theo thứ tự. Tính chất P được gọi là bất biến sau s bước trong hệ thống (X) nếu cứ sau s bước biến đổi ta đều nhận lại được tính chất P.

b) Ứng dụng nguyên lý bất biến

Bất biến là những đại lượng (hay tính chất) không thay đổi trong quá trình chúng ta thực hiện các phép biến đổi. Chẳng hạn khi thực hiện phép tịnh tiến thì khoảng cách giữa hai điểm sẽ không thay đổi. Với phép vị tự thì khác, khoảng cách có thể sẽ thay đổi nhưng sẽ có một bất biến khác, đó là tỉ lệ giữa hai đoạn thẳng.

Có hai mẫu bài toán tổng quát thường được giải quyết bằng bất biến

Bài toán tổng quát 1.1. Có một tập hợp các trạng thái X và tập hợp các phép biến đổi T từ X vào X. Có hai trạng thái a và b thuộc X, hỏi có thể dùng hữu hạn các phép biến đổi thuộc T để đưa trạng thái a về trạng thái b được không?

Bài toán tổng quát 1.2. Có một tập hợp các trạng thái X và tập hợp các phép biến đổi T từ X vào X. Cần chứng minh rằng bắt đầu từ một trạng thái a bất kì, sau một số hữu hạn các phép biến đổi từ T, ta sẽ đi đến trạng thái kết thúc (trong nhiều trường hợp đó là trạng thái ổn định, tức là sẽ không thay đổi khi tiếp tục tác động các phép biến đổi từ T).

1.2.2 Nguyên lí Dirichlet

a) Nguyên lí Dirichlet

Nguyên lí Dirichlet - còn gọi là nguyên lí chuồng chim bồ câu (The Pigeonhole Principle) - hoặc nguyên lý những cái lồng nhốt thỏ hoặc nguyên lí sắp xếp đồ vật vào ngăn kéo (The Drawer Principle). Nguyên lí này được nhà toán học người Đức Johann Dirichlet phát biểu đầu tiên năm 1834 khi ông đề cập tới nó với tên gọi "nguyên lí ngăn kéo". Vì vậy, một tên gọi thông dụng khác của nguyên lý chuồng bồ câu chính là "nguyên lí ngăn kéo Dirichlet" hay đôi khi gọi gọn là "nguyên lí Dirichlet". Trong một số ngôn ngữ như tiếng Pháp, tiếng Ý và tiếng Đức, nguyên lí này cũng vẫn được gọi bằng tên "ngăn kéo" chứ không phải "chuồng bồ câu".

Nguyên lí Dirichlet cơ bản:

Nếu nhốt $n+1$ con thỏ vào n cái chuồng thì bao giờ cũng có ít nhất một chuồng chứa ít nhất hai con thỏ, với n là số nguyên dương.

Nguyên lí Dirichlet tổng quát:

Nếu có N đồ vật được đặt vào trong k hộp thì sẽ tồn tại một hộp chứa ít nhất $\left[\dfrac{N}{k}\right]$ đồ vật (ở đây kí hiệu $[\alpha]$ để chỉ phần nguyên của số α).

Chứng minh.

Giả sử mọi hộp đều chứa ít hơn $\left[\dfrac{N}{k}\right]$ vật. Khi đó tổng số đồ vật là:

$$k\left(\left[\frac{N}{k}\right]-1\right) < k\left[\frac{N}{k}\right] = N.$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết là có N đồ vật cần xếp.

Nguyên lí Dirichlet mở rộng.

Nếu nhốt n con thỏ vào $m \geq 2$ cái chuồng thì tồn tại một chuồng có ít nhất $\left[\dfrac{n+m-1}{m}\right]$ con thỏ.

Chứng minh.

Giả sử trái lại mọi chuồng thỏ không có đến $\left[\dfrac{n+m-1}{m}\right] = \left[\dfrac{n-1}{m}\right]+1$ con, thì số thỏ trong mỗi chuồng đều nhỏ hơn hoặc bằng $\left[\dfrac{n-1}{m}\right]$ con.

Từ đó suy ra tổng số con thỏ không vượt quá $m.\left[\dfrac{n-1}{m}\right] = n-1$ con.

Điều này vô lí vì có n con thỏ. Vậy giả thiết phản chứng là sai. Nguyên lí Dirichlet mở rộng được chứng minh.

b) Ứng dụng nguyên lí Dirichlet

Nguyên lí Dirichlet là một công cụ rất hiệu quả dùng để chứng minh nhiều kết quả sâu sắc của toán học. Nó đặc biệt có nhiều áp dụng trong lĩnh vực khác nhau của toán học. Nguyên lí này trong nhiều trường hợp người ta dễ dàng chứng minh được sự tồn tại mà không đưa ra được phương pháp tìm được vật cụ thể, nhưng trong thực tế nhiều bài toán ta chỉ cần chỉ ra sự tồn tại là đủ rồi. Đôi khi có những bài toán người ta đã dùng rất nhiều phương pháp khác nhau để giải mà vẫn chưa đi đến được kết quả, nhưng nhờ nguyên lí Dirichlet mà bài toán trở nên dễ dàng giải quyết.

Để sử dụng nguyên lí Dirichlet ta phải làm xuất hiện tình huống nhốt "thỏ" vào "chuồng" và thoả mãn các điều kiện:

+ Số "thỏ" phải hiều hơn số "chuồng";

+ "Thỏ" phải được nhốt hết vào các "chuồng", nhưng không bắt buộc "chuồng" nào cũng phải có "thỏ".

Thường phương pháp Dirichlet được áp dụng kèm theo phương pháp phản chứng. Ngoài ra nó còn có thể áp dụng với các phép biến hình.

1.2.3 Nguyên lí cực hạn

a) Nguyên lý cực hạn

Nguyên lí cực hạn được phát biểu đơn giản như sau:

Nguyên lí 1: Trong một tập hữu hạn và khác rỗng các số thực luôn luôn có thể chọn được số bé nhất và số lớn nhất.

Nguyên lí 2: Trong một tập khác rỗng các số tự nhiên luôn luôn có thể chọn được số bé nhất.

b) Ứng dụng nguyên lý cực hạn

Sử dụng nguyên lí cực hạn là một phương pháp được vận dụng cho nhiều lớp bài toán khác, đặc biệt nó có ích khi giải các bài toán tổ hợp nói chung và hình học nói riêng.

Trong quá trình tìm kiếm lời giải nhiều bài toán hình học, sẽ rất có lợi nếu chúng ta xem xét các phần tử biên, phần tử tới hạn (cực biên) nào đó, tức là phần tử mà tại đó mỗi đại lượng hình học có thể nhận giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất, chẳng hạn như cạnh lớn nhất, cạnh nhỏ nhất của một tam giác, góc lớn nhất hoặc góc nhỏ nhất của một đa giác ...

Những tính chất của các phần tử biên, phần tử tới hạn nhiều khi giúp chúng ta tìm kiếm được lời giải thu gọn của bài toán.

Nguyên lí cực hạn thường được sử dụng kết hợp với các phương pháp khác, đặc biệt là phương pháp phản chứng, được vận dụng trong trong trường hợp tập các giá trị cần khảo sát là tập hợp hữu hạn (nguyên lí 1) hoặc có thể có vô hạn nhưng tồn tại một phần tử lớn nhất hoặc nhỏ nhất (nguyên lí 2). Khi vận dụng nguyên lí này, ta phải tiến hành các bước sau:

Bước 1: Chứng minh rằng trong tất cả các giá trị cần khảo sát luôn tồn